ОПТИМИЗАЦИЯ НАКОПИТЕЛЬНЫХ ФОНДОВ ПО ДВУМ КРИТЕРИЯМ

М.Ф. ТУБОЛЬЦЕВ

Белгородский государственный университет

e-mail: Tuboltsev@bsu.edu.ru

Рассматриваются вопросы математического моделирования финансовых процессов накопительного типа. Отличительной особенностью постановки рассматриваемой здесь задачи оптимизации является то, что оптимизация осуществляется по двум критериям, которые являются согласованными и хорошо дополняющими друг друга. В этой постановке модель создания накопительных фондов адекватно отражает реальную ситуацию, а задача оптимизации может иметь практические применения. Предложенный алгоритм решения задачи оптимизации допускает эффективную реализацию с помощью современных вычислительных средств.

Ключевые слова: финансовые потоки, оптимизация, накопительные фонды, моделирование, компьютерное моделирование.

Введение

В условиях экономического кризиса накопительные фонды становятся хорошей альтернативой заимствованиям в качестве инструмента финансирования инвестиционных проектов [1]. В теоретическом плане вопросы оптимального накопления фондов являются проработанными для случая постоянного источника финансирования [2, 3, 4]. Однако в перечисленных работах имеется ряд ограничений, которые в условиях экономического кризиса являются не обоснованными и затрудняют практическое использование методов оптимизации накопительных фондов.

В первую очередь, необходимо снять ограничение на постоянство во времени источника финансирования накопительных фондов. Сейчас, в условиях экономического и финансового кризиса, мощность источников финансирования уменьшилась по сравнению с докризисным периодом, но, в дальнейшем по мере преодоления кризиса, она может снова увеличиться. Для применений на практике достаточно считать, что мощность источника финансирования накопительных фондов U(t) является кусочно-постоянной функцией времени.

Вторым ограничением, редко выполняющимся в условиях кризиса, является требование постоянства процентных ставок, по которым начисляются проценты на средства накопительных фондов. Накопительные фонды формируются на счетах коммерческих банков. Банки устанавливают размеры ставок самостоятельно и могут их изменять в зависимости от экономической ситуации. Поэтому ставка процентов r(t) также является на практике кусочно-постоянной функцией времени.

Говоря об оптимизации накопительных фондов, следует задать критерии качества процесса их формирования в виде целевых функций. С теоретической и практической точек зрения наиболее важными являются задачи скорейшего накопления фондов и минимального вложения средств. Их целевые функции имеют следующий вид:

$$Z=\begin{cases}\displaystyle\int_{t_н}^{t_к}1dt=t_к-t_н, & \text{для задачи быстродействия,}\\[2ex] \displaystyle\int_{t_н}^{t_к}\sum_{i=1}^{N}u_i(t)dt, & \text{для задачи минимизации вложений,}\end{cases}\qquad(1)$$

здесь N – число накапливаемых фондов, $u_i(t)$ – интенсивность вложений в накопительный фонд с номером I, а $t_н$ – начало накопления фонда, $t_к$ – момент окончания периода накопления. В случае постоянства ставок процентов и мощности источника финансирования обе задачи имеют простые алгоритмы решения [2,3], которые легко могут быть реализованы с использованием электронных таблиц или математических пакетов. В общем случае требуется создание компьютерных систем для моделирования процессов создания накопительных фондов с использованием современных средств разработки.

Кроме минимизации целевой функции Z (точнее целевого функционала) большое практическое значение имеет минимизация мощности источника финансирования накопительных фондов. Минимизация функции должна осуществляться относительно некоторой нормы. Нормы можно задавать различными способами, которые отражают наиболее существенные требования к источнику финансирования. Если выбрать в качестве нормы максимум модуля функции, то минимум достигается на некоторой постоянной функции. Такой выбор снижает вероятность кассовых разрывов, поскольку локально минимизирует вложение средств.

Покажем на простом примере, что локальная минимизация вложения средств (при использовании равномерной нормы) может приводить к увеличению общей суммы вложений. Пусть фонд в размере S нужно сформировать за период времени T, используя постоянный источник финансирования мощности U. Ставку процентов r будем считать постоянной (сила роста $p=\ln(1+r)$ также будет постоянной). Если t_a – момент окончания периода активного накопления (увеличение фонда происходит как за счет капитализации процентов, так и за счет вложения средств), то

$$S=\int_{t_н}^{t_a} U\exp(p(t_к-t))dt=\frac{U}{p}\left(\exp(t_к-t_н)-\exp(t_к-t_a)\right). \qquad (2)$$

Поскольку $T=t_к-t_н$, а длительность периода активного накопления $T_a=t_a-t_н$ находим:

$$T_a=-\frac{1}{p}\ln\left(1-\frac{Sp}{U}\exp(-pT)\right). \qquad (3)$$

Общая сумма вложений средств в накопительный фонд $Q = UT_a$, и частная производная $Q'_U < 0$. Это доказывает, что снижение мощности источника финансирования увеличивает общую сумму средств, потраченных на формирование фонда. Кроме этого очевидно, что минимальное значения U достигается тогда, когда $T_a=T$, и из соотношения (3) получаем:

$$U_{\min}=\frac{Sp}{\exp(pT)-1}. \qquad (4)$$

Таким образом, в случае одного фонда минимум мощности постоянного источника финансирования достигается тогда, когда решение задачи быстродействия совпадает с решением задачи минимизации вложений. Далее будет показано, что данный факт имеет место в значительно более общем контексте.

Теоретический анализ

Уточним постановку задачи формирования накопительных фондов. Пусть функция времени $x_i(t)$, i=1,2,…N, представляет собой размер фонда с номером i в момент времени t, а общее число фондов N. В начальный момент времени $t_н$, когда фонды только начинают создаваться, их размеры равны 0; а к некоторому моменту времени $t_к$ все фонды должны иметь фиксированные заранее заданные размеры $S_i>0$.

Математическая модель создания накопительных фондов задается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i(t)=p_i(t)x_i(t)+u_i(t), \qquad (5)$$

где точкой обозначен оператор дифференцирования по времени, а $p_i=\ln(1+r_i(t))$. Должны выполняться также следующие ограничения: $u_i(t) \geq 0$, $U(t)> 0$, $\sum u_i(t)\leq U(t)$ и начальные условия: $x_i(t_н)=0$, $x_i(t_к)= S_i$. Теперь оптимизационную задачу можно сформулировать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
& Z \to \min, \\
& \|U(t)\| \to \min, \\
& \dot{x}_i(t) = p_i(t)x_i(t) + u_i(t), \\
& \mathrm{x_i(t_н) = 0, x_i(t_к) = S_i}, \\
& \mathrm{u_i(t) \ge 0}, \\
& \sum_{i=1}^{N} u_i(t) \le \mathrm{U(t)}, \\
& \mathrm{U(t) \ge 0}.
\end{aligned} \qquad (6)
$$

Принцип максимума Понтрягина позволяет дать эффективное решение рассматриваемой оптимизационной задачи (6), если убрать $||U(t)||\to\min$ [5,6]. Будем временно считать, что это условие снято, а $U(t)$ – некоторая фиксированная функция. Введем обозначение:

$$
P_i(t) = \int_{t_н}^{t} p_i(s)ds, \qquad (7)
$$

т.е. $P_i(t)$ есть одна из первообразных для силы роста $p_i(t)$ фонда с номером i. Поскольку во всех формулах используется разность первообразных, то не играет роли, какая из первообразных функций взята. Тогда имеет место равенство:

$$
x_i(t) = \int_{t_н}^{t} e^{P_i(t)-P_i(s)} u_i(s)ds. \qquad (8)
$$

Пусть $y=(y_1,y_2,\ldots y_N)$ – вектор решений сопряженной системы уравнений:

$$
\dot{y}_i(t) = -p_i(t)y_i(t). \qquad (9)
$$

Система (9) имеет очевидные решения

$$
y_i(t) = C_i e^{-P_i(t)}. \qquad (10)
$$

Пусть x* и u* решения оптимальной задачи, тогда согласно принципу максимума

$$
H(x^*, y, u^*) = \max H(x^*, y, u), 0 \le u \le U(t), \qquad (11)
$$

где гамильтониан $H(x,y,u)$ будет иметь в зависимости от целевой функции оптимизационной задачи следующий вид:

$$
\mathrm{H(x,y,u)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} y_i(t)(p_i(t)x_i(t) + u_i(t)) - 1, \\ \sum_{i=1}^{N} y_i(t)(p_i(t)x_i(t) + u_i(t)) - \sum_{i=1}^{N} u_i(t). \end{cases} \qquad (12)
$$

Здесь верхняя строка соответствует целевой функции в задаче быстродействия, а вторая строка – задаче минимизации вложений. С учетом (12) условие принципа максимума для этих задач может быть преобразовано к виду:

$$
\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} y_i(t)u_i{}^*(t) = U(t)\max y_i(t), \\ \sum_{i=1}^{N} (y_i(t)-1)u_i{}^*(t) = U(t)\max\{(y_i(t)-1), 0\}, \end{cases} \qquad (13)
$$

где $u^*_i(t)$ – оптимальное управление, а $y_i(t)$ – определяется условием (10).

Условия (13) для задачи быстродействия позволяют сделать вывод о том, что оптимальное управление $u^*_i(t)$ для каждого фонда представляет собой сужение функции $U(t)$ на один или несколько интервалов внутри интервала $[t_н,t_к]$. В каждый момент времени источник финансирования используется для активного (с вложением средств) накопления только одного фонда, остальные фонды в это время увеличиваются только за счет капитализации процентов. Для задачи минимизации вложений может существовать последний интервал, на которой все фонды находятся в режиме пассивного накопления. Последовательность переключения управления полностью определяется условиями (10) и (13). Существуют различные способы построения оптимального управления, но все они требуют большого количества машинных вычислений [7, с.135].

В общем случае интервалы активного и пассивного (только за счет капитализации) накопления могут неоднократно чередоваться. В ряде случаев удается получить более точную информацию относительно переключения управлений. Важнейшим является случай, когда ставки процентов мажорируют одна другую, т.е. когда выполняется условие:

$$r_1(t) > r_2(t) > \dots t_N(t), \tag{14}$$

где первоначальная нумерация, возможно, изменена так, чтобы выполнялось условие (14). Всюду в дальнейшем будем предполагать именно такой порядок нумерации фондов. Условию, аналогичному условию (14), очевидным образом, удовлетворяют также функции $p_i(t)$ и $P_i(t)$. Из этого следует, что сопряженные функции $y_i(t)$ внутри интервала $[t_н,t_к]$ либо мажорируют одна другую, либо пересекаются в единственной точке.

Для любого допустимого управления неприемлемо, когда одна сопряженная функция $y_i(t)$ мажорирует другую сопряженную функцию $y_j(t)$, поскольку тогда фонд с номером j не имеет активного периода накопления и, следовательно, равен 0 в силу равенства (8). Поэтому сопряженные функции должны последовательно пересекаться в порядке номеров. Оптимальное управление, в этом случае, устроено особенно просто: все средства источника финансирования вкладываются последовательно в один из накопительных фондов в порядке убывания ставок процентов. Для задачи минимизации вложений в конце может (как правило) находится один общий для всех фондов период пассивного накопления.

Методика применения

Для нахождения моментов переключения управления достаточно (в случае задачи минимизации вложений) знать порядок переключения, поскольку граничные условия и соотношения (8) моменты переключения полностью определяют. Пусть моменты переключения управления $t_1,t_2,\dots,t_{N-1},<t_N$ удовлетворяют неравенствам $t_н=t_0<t_1<\dots<t_N\le t_к$, тогда выполняются соотношения:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{P_i(t_к)-P_i(s)}U(s)ds = S_i,\ i = 1,2,\dots N. \tag{15}$$

Моменты переключения управления находятся последовательно, начиная с первого. За исключением случая, когда ставки процентов постоянны, для решения системы уравнений (15) необходимо использовать вычислительную технику.

Задача быстродействия решается сложнее, поскольку момент времени $t_к$ не задан, а $t_N=t_к$. Наиболее простой (но возможно наименее эффективный) способ определения моментов переключения управления состоит в том, чтобы задавать некоторым специальным образом моменты времени $t_к$ так, чтобы при решении задачи минимизации вложений разность $t_к-t_N$ стремилась к нулю. В пределе получается решение задачи быстродействия, поскольку интервал пассивного накопления отсутствует.

Рассмотрим теперь двухкритериальную задачу (6). Для ее формулировки необходимо зафиксировать некоторую норму на множестве функций с областью определения $[t_н,t_к]$. Выбор нормы очень важен, так как он отражает наиболее важные требования к источнику финансирования. Поскольку инструмент накопительных фондов наиболее интересен в контексте агрегирования средств постоянных, маломощных источников, таких как торговые сборы, пошлины и т.п., использование равномерной нормы вполне приемлемо. В этом случае минимум достигается на постоянных функциях. В принципе возможно применение и других норм, но такой выбор всегда должен быть основан на существенных требованиях к источнику финансирования.

При любом выборе нормы, решение задачи (6) на качественном уровне очевидно: двухкритериальное решение будет оптимальным, если решение задачи на минимум вложений будет одновременно и решением задачи быстродействия. Конкретный вид нормы может только усложнить или упростить численное решение задачи. При равномерной норме и постоянных ставках процентов система уравнений (15) особенно упрощается:

$$
\begin{cases}
S_1 = \dfrac{U}{p_1}\left(e^{p_1(t_к - t_н)} - e^{p_1(t_к - t_1)}\right), \\
S_2 = \dfrac{U}{p_2}\left(e^{p_2(t_к - t_1)} - e^{p_2(t_к - t_2)}\right), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
S_N = \dfrac{U}{p_N}\left(e^{p_n(t_к - t_{N-1})} - 1\right).
\end{cases}
\tag{16}
$$

Система уравнений (16) имеет N уравнений с N неизвестными t_1, t_2, …, t_{N-1} и U. Решая систему (16), находим моменты переключения и минимальную мощность источника финансирования достаточную для накопления фондов. Рассмотрим конкретный пример.

Пусть размер первого фонда S_1=1 млн. рублей и на него начисляются проценты из расчета 10% годовых, второго S_2=2 млн. рублей и ставка 15% годовых. Накопление фондов начато 1.2.2008 и должно завершиться 1.9.2008. При какой минимальной интенсивности вложений можно осуществить накопление в заданные сроки? Решение системы уравнений (10) дает для минимальной интенсивности источника значение U_{min}=13567 рублей/день. Источник такой интенсивности вполне может быть создан на основе торговых сборов небольшого муниципального образования.

Задача (6) является весьма полезной на практике, поскольку позволяет путем не очень сложных вычислений оценить реальные возможности и риски. Знание предельного значения источника финансирования инвестиционных или иных программ, поможет предвидеть возможные кассовые разрывы и другие потенциальные проблемы финансирования, способные привести к негативным последствиям. Оценка минимального достаточного потока средств должна быть первым этапом расчета финансового инвестиционного плана.

Литература

1. *Тубольцев М.Ф.* Методы оптимального накопления фондов в бюджете развития муниципального образования // Научная мысль Кавказа. – 2005. –№8. – С.82-91.
2. Тубольцев М.Ф. Оптимальные по быстродействию стратегии создания накопительных фондов // «Научные ведомости», серия «Информатика, Прикладная математика, Управление», том 1 выпуск 1(19).– Белгород: Изд-во БелГУ, 2004.– С.65-70.
3. *Тубольцев М.Ф.* Оптимальные по критерию минимума вложения средств стратегии создания накопительных фондов. // «Научные ведомости», серия «Информатика, Прикладная математика, Управление», № 1 (21) выпуск 2.– Белгород: Изд-во БелГУ, 2006.– С.50-55.
4. *Тубольцев М.Ф.* Математическое моделирование систем накопительных фондов //«Информационные технологии моделирования и управления», выпуск 8(33). – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2006. – С. 990-995.
5. Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С. К теории оптимальных процессов, ДАН СССР, 110, №1 (1956). – С.7-10.
6. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. – 4-е изд. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
7. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория): Учебник/ В.И. Благодатских. Под ред. В.А. Садовничего. – М.: Высш.шк., 2001. – 239 с.: ил.

OPTIMIZATION OF ACCUMULATIVE FUNDS BY TWO CRITERIA

M.F. TUBOLTSEV

Belgorod State University

e-mail: Tuboltsev @bsu.edu.ru

Questions of mathematical modeling of financial processes of memory type are considered. Distinctive feature of statement of a problem of optimization considered here is that optimization is carried out by two criteria which are coordinated and well supplementing each other.

In this statement the model of creation of memory funds adequately reflects a real situation, and the optimization problem can have practical applications. The offered algorithm of the decision of a problem of optimization supposes effective realization by means of modern computing means.

Keywords: financial streams, optimization, memory funds, modeling,

computer modeling.